UN PROCESO FORMATIVO PARA LA INVESTIGACIÓN: ANÁLISIS DE NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN EN UN PROCESO DE ESTUDIO SOBRE DIVISIBILIDAD.

Bettina Milanesio, Silvia Etchegaray,
María Elena Markiewicz

Universidad Nacional de Río Cuarto

Con este trabajo intentamos socializar una experiencia de formación en investigación

En el marco de:

Beca Nacional para incentivar vocaciones científicas

Dentro del Proyecto:

“El análisis de prácticas, objetos y procesos como condicionantes de diferentes estudios didáctico-matemáticos en la educación superior inicial y continua”

Objetivo Específico

Indagar en los **niveles de algebrización** en un proceso de estudio particular que se plantea en la formación de profesores para la escuela secundaria en tareas correspondientes a la Divisibilidad en $\mathbb{Z}$.

Este estudio se enmarca en una actual línea de investigación en Didáctica de la Matemática

Profundizada en

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS)

Donde se supone

La existencia de un proceso de algebrización de la matemática escolar que va identificando diferentes **niveles de algebrización** a lo largo de la educación formal, que necesita ser desnaturalizado para pensar la matemática a enseñar, lo que lo convierte en un <u>importante problema didáctico a investigar</u>**.**

La formación inicial de un Profesor de Matemáticas se realiza en un ambiente totalmente algebrizado, estando ausente -en general- la distinción de los diferentes y graduales procesos de algebrización que se podrían transitar en la actividad matemática. Esto puede ser un problema para aquellos sujetos que han elegido "enseñar matemática" por lo que se pretende desnaturalizar esta problemática latente en la formación inicial de profesores.

MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

- Este trabajo tiene las características de una investigación esencialmente descriptiva e interpretativa. La metodología empleada es inherente y emergente del EOS, que constituye el marco referencial del Proyecto de investigación en el que se realiza este trabajo.

PRINCIPALES NOCIONES TEÓRICAS

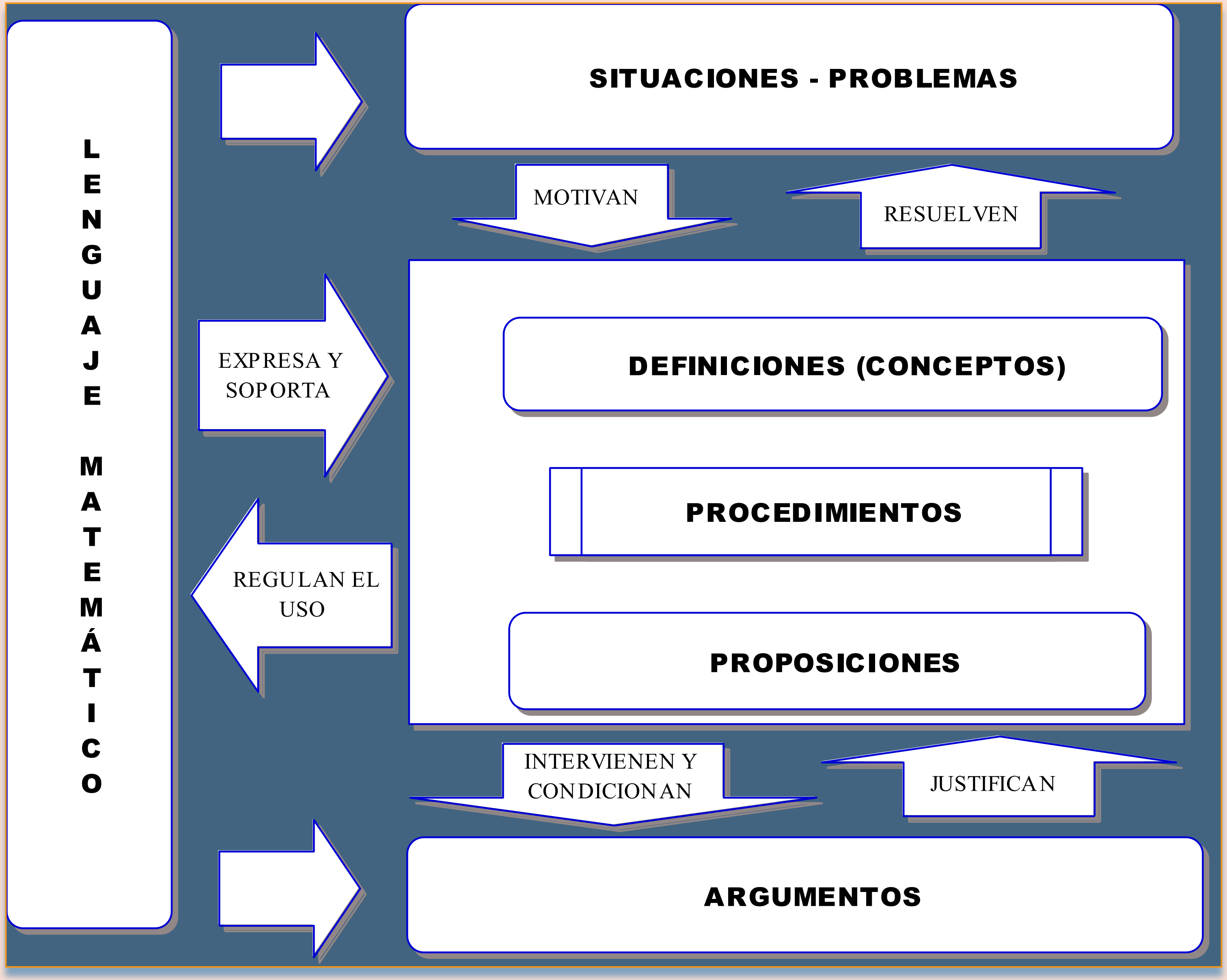
Práctica matemática → "Toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 334*)*

Significado de un objeto matemático → Emerge de los **sistemas de prácticas** asociadas a un campo de problemas.

El EOS propone cinco niveles de análisis aplicables a un proceso de estudio matemático, de los cuáles, a los fines de esta investigación, se han considerado los dos primeros, a saber:

- **Objetos primarios.**
- **Procesos duales.**

Objetos primarios



Procesos duales

- Particularización - Generalización: pasaje de un caso particular (extensivo) a una clase más general (intensivo).
- Descomposición - Reificación: tratamiento sistémico de los objetos para luego reificarlos reconociéndolos como objetos unitarios.
- Materialización – Idealización: un objeto ostensivo es utilizado para representar, evocar o visualizar un objeto no ostensivo ideal.
- Representación – Significación: consiste en atribuir significado (contenido) a una expresión mediante el establecimiento de funciones semióticas.
- Personalización –Institucionalización: pasaje de lo personal a lo institucional.

TRABAJO DE CAMPO

Para poner a funcionar estas herramientas

Realizamos

Un análisis ontosemiótico determinando **objetos primarios y procesos duales**, para determinar los **niveles de algebrización** presentes en la actividad matemática

Desarrollada ante

Tres muestras de problemas sobre Divisibilidad en $\mathbb{Z}$ (en dos ambientes diferentes)

Alumnos avanzados en la carrera

Alumnos de Cuarto año de nivel secundario

Tomando como representantes

Una resolución de nivel superior y dos de nivel secundario

Dos primeras muestras de problemas

Primera muestra:

1) ¿El producto de dos múltiplos de 5 es un múltiplo de 5?

1') ¿El producto de un múltiplo de 5 por un múltiplo de 7, es siempre un múltiplo de 5? ¿Es siempre un múltiplo de 35?

1´´) ¿Se podrá afirmar en general que: el producto de dos números naturales es un múltiplo de ambos?. **¿El producto de un múltiplo de un número natural por el múltiplo de otro número natural es siempre un múltiplo del producto de ambos?**

Segunda muestra:

2) Justificar que 44+55+77 es un múltiplo de 11, sin necesidad de calcular la suma. ¿Puede mostrar otros divisores, más allá del 11, sin calcular 44+55+77 y usando solamente la definición de múltiplo o divisor de un número? ¿Podría enunciar algo más general?

2') La suma de un múltiplo de 11 más un múltiplo de 7 ¿es un múltiplo de 11? ¿Es un múltiplo de 7? ¿Es un múltiplo de 11+7? ¿Podrías enunciar algo general? En caso en que la respuesta sea negativa, dar condiciones para que ocurra.

2'') ¿Y si ahora pensamos en la suma de un múltiplo de 8 más un múltiplo de 24? ¿Y en la suma de un múltiplo de 8 y un múltiplo de 12? ¿Podrías enunciar algo general? En caso en que la respuesta sea negativa, dar condiciones para que ocurra.

Resolución estudiante del profesorado

1: Sean a y b dos múltiplos de 5: Como a es múltiplo de 5, entonces existe k perteneciente a N : a=5.k. Como b es múltiplo de 5, entonces existe k' perteneciente a N : b=5.k'. Queremos ver si el producto de a por b resulta múltiplo de 5. Para esto planteamos:
a.b=(5.k).(5.k') =5.(5.k.k') utilizando las propiedades asociativa y conmutativa del producto.
Y por ley de cierre del producto en N, existe k´´= 5.k.k' perteneciente a N/a.b=5.k'', por lo tanto el producto de dos múltiplos de 5 es un múltiplo de 5.

1": Sean c y d naturales, debemos ver si el producto es múltiplo de ambos.
Queremos ver si existe un k natural tal que c.d=c.k. Y tomando k=d, esto vale, por lo tanto el producto resulta múltiplo del natural c.
De la misma manera, queremos ver si existe un k natural tal que c.d=d.k. Tomando k=c y utilizando la propiedad conmutativa del producto en el segundo lado de la igualdad, esto vale. Por lo tanto el producto de dos naturales es un múltiplo de ambos.

Resolución estudiante 1 de nivel secundario

1) Si, porque 5.5 = 25   15.15 = 225
5.3 = 15   25.25 = 775 } y al dividirlo por 5 si queda un multiplo de 5

1'') - Si es múltiplos de ambos porque ambos forman parte de la tabla de ambos.
5 x 7 = 35   7 x 5 = 35
6 x 7 = 42   7 x 6 = 42
6 x 8 = 48   8 x 6 = 48

Resolución estudiante 2 de nivel secundario

1_ si es multiplo de 5 porque seria (x.5).(p.5) ej:
10.5 = 50
35.40 = 1400
150.25 = 3750
230.30 = 6900
555.5 = 2775
295.85 = 25075

1'' = A. dos numeros naturales a ; b
los multiplos de a se escriben (a.algo) y los de b se escriben (b.algo) entonces si se multiplica a.b el resultado es multiplo de a y de b

Resolución estudiante del profesorado.

2’: Sean a un múltiplo de 11 y b un múltiplo de 7, entonces: Existe k natural / a=11.k y Existe k' natural /b=7.k´. **Queremos ver si la suma de un múltiplo de 7 más un múltiplo de 11 es múltiplo de 11**, es decir si existe k“ natural / a+b=11.k". No vale en general, contraejemplo: sean 44 y 28 múltiplos de 11 y 7 respectivamente: 44+28=72, y 72 no es múltiplo de 11, puesto que no existe l natural tal que 72=11.l. Para que esto valga sería suficiente que el k’ sea múltiplo de 11, ya que luego: a+b=11k+7k'=11k+7.(11.q)=11(k+7.q) (utilizando propiedades asociativa y distributiva). Por lo tanto, existe k’’=k+7.q natural (por ley de cierre de la suma en N) tal que a+b=11.k´´.

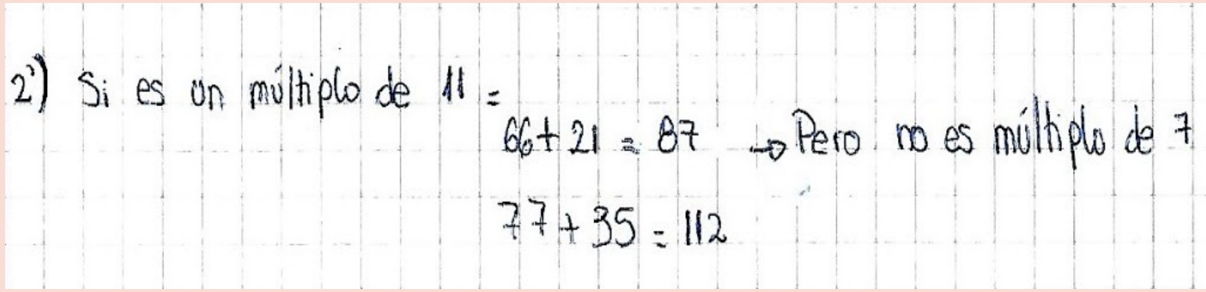
Queremos ver si la suma de un múltiplo de 7 más un múltiplo de 11 es múltiplo de 7+11, es decir si existe k" natural / a+b=(11+7)k"=18k“. No vale en general, contraejemplo: sean 22 y 7 los múltiplos de 11 y 7, entonces: 22+7=29 , y 29 no es múltiplo de 18.

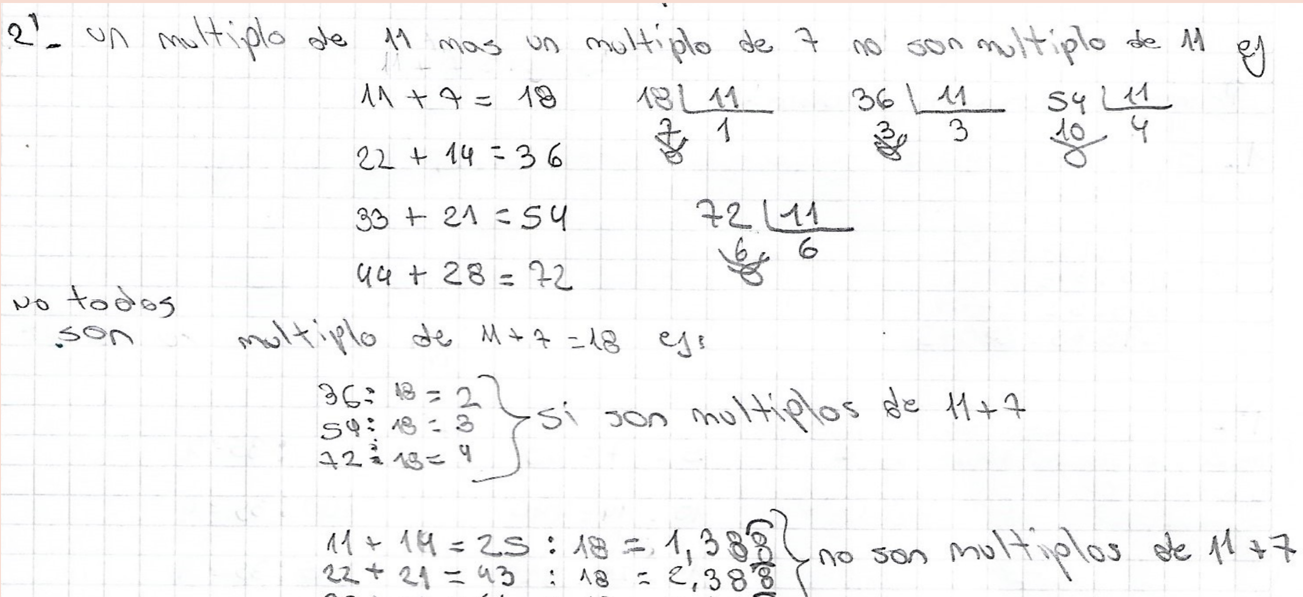
Para que valga podemos establecer algunas condiciones: <u>Condición suficiente:</u> Si el número que existe tal que el múltiplo de 7 se escribe como este número por 7, y el que existe tal que el múltiplo de 11 se escribe como este número por 11 son iguales (k=k’) entonces dicha suma es múltiplo de 18. Justificación: 11k+7k=k(11+7)=k.18. <u>Condición suficiente</u>: Si los múltiplos de 7 y 11 son múltiplos de 18 entonces la suma es múltiplo de 18:

Debe existir un q natural /7.k'=18.q. Debe existir un s natural /11.k=18.s. Por lo tanto: 11k+7k'=(18s) + (18q) =18(s+q) por propiedad distributiva. Y s+q es natural por ley de cierre de la suma en N. Entonces vemos que existe un natural tal que la suma de un múltiplo de 7 más uno de 11 se escribe como dicho natural por 18.

<u>Generalizaciones: -</u>Dados dos números coprimos m y n: la suma de un múltiplo de m más un múltiplo de n, será múltiplo de m si y sólo si, el número que existe tal que el múltiplo de n se escribe como ese número por n, es múltiplo de m. - Si los números que existen tal que un múltiplo de m se escribe como este número por m, y uno de n como este número por n son iguales, entonces la suma de un múltiplo de m más uno de n resulta múltiplo de m+n. - Si los múltiplos de m y n son múltiplos de m+n entonces la suma resulta múltiplo de m+n.

Resoluciones estudiantes 1 y 2 de nivel secundario





Una vez realizado este análisis ontosemiótico, identificamos los <u>criterios</u> que el EOS propone para distinguir los diferentes <u>niveles de algebrización</u> en las prácticas operativas y discursivas que realiza un sujeto epistémico o ideal, teniendo en cuenta la diversa naturaleza de los objetos y procesos matemáticos.

La presencia de “objetos intensivos” de diferentes grados de generalidad. Entendemos por objetos intensivos a entidades generales, abstractas que emergen de objetos perceptibles o no y de las acciones que se realizan con ellos.

El tratamiento que se aplica a dichos objetos (operaciones, transformaciones basadas en la aplicación de propiedades, o basadas en las estructuras algebraicas).

Tipos de lenguajes usados (natural, icónico, gestual o simbólico).

PRIMEROS NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN DETERMINADOS POR EL EOS

Nivel 0

- Se distingue por la ausencia de algebrización. Intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante los lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, pero este valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares.

Nivel 1

- Intervienen objetos intensivos cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante los lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con estos objetos. En tareas estructurales, se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente. En tareas funcionales, se reconoce la generalidad aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal.

Nivel 2

- Intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico-literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial temporal. En tareas estructurales, las ecuaciones son de la forma **Ax+B=C**. En tareas funcionales, se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.

Nivel 3

- Se generan objetos intensivos representados de manera simbólica-literal y se opera con ellos; se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones del tipo **Ax+B=Cx+D**, y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones.

Nivel 4

- El uso de parámetros como registro numérico y para expresar familias de ecuaciones y funciones es indicativo de un cuarto nivel. "Un significativo cambio conceptual debe ocurrir para que los estudiantes se sientan seguros usando parámetros en las expresiones algebraicas en lugar de números" (Ely y Adams, 2012)

NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN: ACTIVIDAD MATEMÁTICA ESTUDIANTE 2 NIVEL SECUNDARIO

La actividad matemática posee características de un **nivel 1 de algebrización**

Intervienen objetos intensivos de grado dos en un lenguaje natural y numérico, por ejemplo, en 1) se entiende al múltiplo de 5 en cada factor de los productos y en los resultados a partir de la propiedad de terminar en 0 o en 5. Al igual que en el inciso 2' se entiende a los múltiplos de 11, de 7 o de 18, a partir de observar el resto en la división. Intervienen algunos símbolos que refieren a los intensivos reconocidos (x.5), pero sin operar con estos objetos.

Emergen otros intensivos, propiedades generales tales como: "no todos son múltiplos de 11+7" a partir de procesos de generalización, materialización, reificación y significación puestos a funcionar en dichos objetos.

La actividad matemática posee características de un **nivel 2 de algebrización**

Intervienen, en algunos casos, variables expresadas con lenguaje simbólico-literal para referir a los intensivos reconocidos, por ejemplo: "los múltiplos de a se escriben como a.algo y los de b se escriben b.algo, entonces si se multiplica a.b el resultado es múltiplo de a y de b".

NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN: ACTIVIDAD MATEMÁTICA ESTUDIANTE DEL PROFESORADO

Podemos categorizar a la actividad matemática dentro de:

Un nivel consolidado de algebrización (3)

Se generan objetos intensivos representados de manera simbólica-literal y se opera con ellos. Por ejemplo: a.b=(5.k).(5.k') =5.(5.k.k')

Se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia, por ejemplo:11k+7k'=(18s)+(18q)=18(s+q)

Se generan propiedades de un mayor nivel de generalidad es decir nuevos objetos intensivos, a través de procesos de generalización, materialización, reificación y significación sobre dichos objetos. Por ejemplo: dados dos números coprimos m y n, la suma de un múltiplo de m más un múltiplo de n es múltiplo de n si y sólo si, el número que existe tal que el múltiplo de n se escribe como ese número por n, es múltiplo de m.

Y además tiene características que la ubican dentro de:

Un nivel 4 de algebrización

Puesto que intervienen expresiones en donde participan parámetros, utilizados como registro numérico dentro del dominio de los números naturales por ejemplo k, k’, k’’, q, s...

REFLEXIÓN FINAL

- *La práctica matemática expuesta en dos ambientes diferentes y el análisis realizado pone en evidencia la distancia entre la actividad matemática del futuro profesor la cual, debido a su formación,* no puede concebirse sin el uso pleno del instrumento algebraico, *y la actividad matemática de los estudiantes de nivel secundario que, cuando el problema lo permite, está situada generalmente en niveles de algebrización intermedios. Esta distancia puede generar un obstáculo para el futuro análisis de producciones de estudiantes del secundario por parte de nosotros, en tanto noveles docentes, para entrar en "diálogo con ellos" e incluso para gestionar idóneamente la clase.*
- *Desde este lugar, puedo valorar la importancia de este tipo de estudios didácticos como una continuación y complementación de lo que se "vive" en la formación inicial de profesores.*

¡Muchas gracias!

ANEXOS

Análisis ontosemiótico de objetos primarios: Resolución del estudiante del profesorado.

PROBLEMAS	Probar o refutar si dos múltiplos de 5 es múltiplo de 5; si el producto de dos números naturales es un múltiplo de ambos. Demostrar o refutar si la suma de un múltiplo de 7 y un múltiplo de 11 es: múltiplo de 7, múltiplo de 11 y múltiplo de 11+7. En el caso de que los enunciados sean refutados, dar condiciones para que valgan. Plantear nuevas generalizaciones.
LENGUAJE	Coloquial: Al enunciar la validez de propiedades. Por ejemplo, al concluir: "Por lo tanto el producto de dos naturales es un múltiplo de ambos" Simbólico aritmético: sean 44 y 28 múltiplos de 11 y 7 respectivamente: 44+28=72, y 72 no es múltiplo de 11. Simbólico algebraico: a es múltiplo de b si y sólo si existe k natural / a=b.k.
DEFINICIONES	Definición de suma y producto. **Definición algebrizada de múltiplo: a es múltiplo de b si y sólo si existe k perteneciente a N / a=b.k.** Definición de divisor: a es divisor de b si y sólo si b es múltiplo de a. Definición de contraejemplo: es un ejemplo que permite refutar una afirmación. Definición de números coprimos: dos números lo son si no tienen divisores en común distintos de 1.
PROPIEDADES	**Disponibles:** Propiedad asociativa del producto y la suma en N. Propiedad conmutativa del producto. Propiedad cancelativa. Ley de cierre de la suma y el producto en N. Propiedad distributiva del producto respecto a la suma en N. **Emerge la validez de las siguientes propiedades: -**El producto de dos múltiplos del 5 es siempre un múltiplo de 5- El producto de dos números naturales es un múltiplo de ambos. **Emergentes:** La suma de un múltiplo de 7 más uno de 11 es múltiplo de 11 si el número que existe tal que un múltiplo de 7 se escribe como este número por 7, es múltiplo de 11. Dados dos números coprimos m y n: - La suma de un múltiplo de m más un múltiplo de n, será múltiplo de m si y sólo si, el número que existe tal que un múltiplo de n se escribe como este número por n, es múltiplo de m. - Si los números que existen tal que un múltiplo de m se escribe como este número por m, y uno de n como este número por n son iguales, entonces la suma de un múltiplo de m más uno de n resulta múltiplo de m+n. - Si los múltiplos de m y n son múltiplos de m+n entonces la suma resulta múltiplo de m+n..
ARGUMENTACIONES	Emergen validaciones deductivas: Al demostrar las propiedades en 1 y 1''. Al buscar condiciones para que valgan los enunciados de 2'. Al plantear contraejemplos para refutar los enunciados. No deductiva: Al generalizar propiedades a partir de observar un caso particular representativo.
PROCEDIMIENTOS	Tomar múltiplos – Aplicar la definición algebrizada de múltiplo – Operar algebraicamente, aplicando propiedades generales

Análisis ontosemiótico de procesos duales: Resolución estudiante del profesorado.

PARTICULARIZACIÓN-GENERALIZACIÓN	Para demostrar propiedades generales para todo par de múltiplos de 5, por ejemplo, se comienza tomando un par de múltiplos de 5 particulares aunque arbitrarios. Se analizan y estudian casos particulares en 1 y 1' para generalizar en las propiedades emergentes a partir de 1''. Se ven estas últimas generalizaciones a partir de los casos particulares anteriores. *En 2':* Se generalizan propiedades a partir de trabajar con casos particulares, por ejemplo, trabajando con los números 7 y 11 se puede generalizar lo siguiente: dados dos números coprimos m y n : la suma de un múltiplo de m más un múltiplo de n, será múltiplo de m si y sólo si, el número que existe tal que un múltiplo de n se escribe como este número por n, es múltiplo de m. *(1)*
DESCOMPOSICIÓN-REIFICACIÓN	Se reifican las propiedades emergentes en 1'' a partir de analizar los casos particulares con múltiplos de 5, de 7 y de 35 respectivamente. Se transita un proceso descompuesto en partes analizando los diferentes casos para luego unificarlas en propiedades generales. Por ejemplo, la propiedad mencionada arriba con los números 7 y 11.
MATERIALIZACIÓN-IDEALIZACIÓN	Se materializa la idea de múltiplo de a, como a.k con k natural. Se materializa al producto de dos múltiplos de 5 como (5.k).(5.k'). Se materializan las propiedades que se quieren demostrar por ejemplo con los siguientes ostensivos: (5k)(5k')=5.k''; c.d=c.k. A la suma de un múltiplo de 11 y uno de 7 se la materializa con el ostensivo: 11k+7k'. Se materializan las propiedades generales emergentes en el punto 2, mediante un lenguaje coloquial como se ve en *(1)*
REPRESENTACIÓN-SIGNIFICACIÓN	A la representación coloquial "a es múltiplo de b" se le da el significado (contenido) de que existe un k natural / a=b.k. Se significa a 'k' como el número que existe tal que un múltiplo de a se escribe como este número por a. A la expresión: (5k)(5k')=5.k'' se le otorga el contenido de que el producto de dos múltiplos de 5 es múltiplo de 5. A la expresión, por ejemplo. "existe k''=k+q tal que a+b=11(k+q)" se le otorga el contenido de que a+b es múltiplo de 11. Y también por ejemplo a la expresión 11k+7k'=(18s) + (18q) =18(s+q) se le otorga el siguiente contenido: dados dos números coprimos m y n: si los múltiplos de m y n son múltiplos de m+n entonces la suma resulta múltiplo de m+n.

Análisis ontosemiótico resolución estudiante 1 nivel secundario.

OBJETOS PRIMARIOS: *PROBLEMAS*	Probar o refutar si dos múltiplos de 5 es múltiplo de 5 y si el producto de dos números naturales es un múltiplo de ambos. Demostrar o refutar si la suma de un múltiplo de 7 y un múltiplo de 11 es: múltiplo de 7, múltiplo de 11, y múltiplo de 11+7. En el caso de que los enunciados sean refutados, dar condiciones para que valgan.
LENGUAJE	Coloquial por ejemplo "Y al dividirlo por 5 si queda un múltiplo de 5"" Simbólico aritmético por ejemplo "25*21=525" (Con 25 múltiplo de 5, 21 múltiplo de 7 y 525 múltiplo de 5)
DEFINICIONES	Definición de suma, producto y división de naturales. **Múltiplo de un número: Aquel natural que al dividirlo por el número te da un cociente exacto (definición que prevalece en la práctica matemática). También se pone en juego la definición de múltiplo como aquel que aparece en la tabla del número.**
PROPIEDADES	**Disponibles:** Propiedad conmutativa del producto. **Emerge la validez de las siguientes propiedades:** "El producto de dos múltiplos de 5 es un múltiplo de 5", "El producto de dos naturales es múltiplo de ambos", "La suma de un múltiplo de 7 más uno de 11 es múltiplo de 11 pero no de 7"
ARGUMENTACIONES	No deductiva al verificar en casos particulares una propiedad general y al generalizar propiedades a partir del análisis de casos particulares (por ejemplo, la suma de un múltiplo de 11 más uno de 7 es múltiplo de 11).
PROCEDIMIENTOS	Plantear distintos casos particulares – Utilizar la definición de múltiplo – Operar - . Asegurar y refutar las conjeturas.

PROCESOS DUALES: *PARTICULARIZACIÓN-GENERALIZACIÓN.*	Se observa al verificar propiedades generales en casos particulares y además se sobregeneralizan afirmaciones que no son ciertas por ejemplo "La suma de un múltiplo de 7 más uno de 11 es múltiplo de 11 pero no de 7"
DESCOMPOSICIÓN-REIFICACIÓN	Si bien se da respuesta en 1'' a partir de trabajar con objetos unitarios, se logra reificar a los múltiplos de un número en un sistema representativo de los múltiplos: las tablas de multiplicar. Además se logran reificar propiedades emergentes como objetos unitarios, como la mencionada arriba.
MATERIALIZACIÓN-IDEALIZACIÓN	Al materializar un múltiplo de 5 con el ostensivo 5x3. Al materializar la idea de que el producto de dos números naturales es un múltiplo de ambos a través de la expresión "ambos forman parte de la tabla de ambos"
REPRESENTACIÓN-SIGNIFICACIÓN	A la expresión "ser múltiplo de" le otorga el contenido de aquel que al dividirlo por el número te da un cociente exacto; de aquel número que aparece en la tabla de multiplicar; y al múltiplo de 5 aquel que termina en 0 o 5. Por otra parte a la expresión por ejemplo: "6.7=42" se le da el contenido de que 42 es múltiplo de 6. A la expresión por ejemplo "66+21=87" se le da el contenido de que la suma de un múltiplo de 7 más un múltiplo de 11 no es múltiplo de 7"

Análisis ontosemiótico de objetos primarios: resolución estudiante 2 nivel secundario.

PROBLEMAS	Probar o refutar si dos múltiplos de 5 es múltiplo de 5 y si el producto de dos números naturales es un múltiplo de ambos. Demostrar o refutar si la suma de un múltiplo de 7 y un múltiplo de 11 es: múltiplo de 7, múltiplo de 11, y múltiplo de 11+7. En el caso de que los enunciados sean refutados, dar condiciones para que valgan.
LENGUAJE	Coloquial: por ejemplo "un múltiplo de 11 más un múltiplo de 7 no son múltiplo de 11" Simbólico aritmético: por ejemplo "10.5=50" Simbólico algebraico: por ejemplo "(x.5).(p.5)"
DEFINICIONES	Definición de suma, producto y división exacta de dos números naturales. Resto de la división. Se usan las siguientes definiciones de **múltiplo de un número: un número natural es múltiplo de x cuando se puede escribir como x por algo. Un número es múltiplo de 5 si termina en 0 o 5. Un número es múltiplo de otro cuando al dividirlo por este otro el resto es cero (o la división es exacta).**
PROPIEDADES	**Propiedades disponibles**: Criterio de divisibilidad de 5. Implícitamente en 1'' se usa la propiedad conmutativa del producto. **Emergencia de validez de las propiedades:** "El producto de dos múltiplos de 5 es múltiplo de 5" "El producto entre dos naturales a y b es múltiplo de a y de b" "Un múltiplo de 7 más un múltiplo de 11 no son múltiplo de 11" "No todas estas sumas son múltiplo de 11+7" **Propiedades emergentes:** "La suma de un múltiplo de 7 más un múltiplo de 11 no siempre es múltiplo de 11+7" "Un múltiplo de 11 más un múltiplo de 7 no son múltiplo de 11"
ARGUMENTACIONES	En 1: No deductiva al verificar en casos particulares una propiedad general. En 1'': Deductiva al probar la propiedad dada en el enunciado. En 2': No deductiva ya que a partir por ejemplo de observar casos particulare se generaliza que la suma de un múltiplo de 7 más un múltiplo de 11 no siempre son múltiplo de 11+7. Deductiva cuando se dan contraejemplos para refutar una afirmación como en el caso también de 2'.
PROCEDIMIENTOS	Escribir los múltiplos de 5 como x.5, luego tomar ejemplos al azar y verificar-usando el criterio de divisibilidad por 5- que el resultado del producto de dos múltiplos de 5 es múltiplo de 5. Para 1'' tomar dos naturales a y b, escribir los múltiplos de a como "a*algo" y los de b como "b*algo", y deducir que al multiplicar a por b el resultado será múltiplo de a y de b. En 2' plantear contraejemplos verificando con la división exacta que la suma de un múltiplo de 11 más un múltiplo de 7 no es múltiplo de 11. Plantear también algunos ejemplos para verificar que dicha suma sí es múltiplo de 18, y otros que no cumplen esto.

Análisis ontosemiótico de procesos duales: Resolución estudiante 2 nivel secundario

PARTICULARIZACIÓN-GENERALIZACIÓN	Pasaje de las expresiones generales (x.5).(p.5) a los casos particulares 10.5, 35.40, etc. Se verifica la propiedad general «el producto de dos múltiplos de 5 es un múltiplo de 5» mediante casos particulares. Se generalizan propiedades a partir de trabajar con casos particulares, por ejemplo, trabajando con múltiplos de 11 y múltiplos de 7 se generaliza que no siempre la suma de un múltiplo de 11 más un múltiplo de 7 es múltiplo de 11+7. Además, se sobregeneralizan afirmaciones que no son ciertas, por ejemplo, que un múltiplo de 11 más un múltiplo de 7 no es múltiplo de 11.
MATERIALIZACIÓN-IDEALIZACIÓN	Se materializa la idea de producto de dos múltiplos de 5 como “(x.5).(p.5)” . Se materializa un múltiplo de a con el ostensivo: “a.algo”. Las divisiones expresadas en 2` materializan la idea de que para ver si un número es múltiplo de otro hay que comprobar si el reto de la división es 0 o si la división es exacta. Se materializa la propiedad referida a que no siempre un múltiplo de 11 más un múltiplo de 7 es múltiplo de 11 mediante la expresiòn «un múltiplo de 11 más un múltiplo de 7 no son múltiplo de 11»
REPRESENTACIÓN-SIGNIFICACIÓN	Se le otorga a la expresión “es múltiplo de” diferentes contenidos (ya sea como resultado de un producto o a partir de observar el resto en la división). A la representación x.5 se le da el contenido de múltiplo de 5, al igual que a la expresión a. algo se le da el significado de múltiplo de a. Con la expresión «un múltiplo de 7 más un múltiplo de 11 no son múltiplo de 11» están significando que esa suma nunca será un múltiplo de 11 A la expresión “22+14=36” se le da el contenido de que la suma de un múltiplo de 11 más un múltiplo de 7 no es múltiplo de 11.