La complejidad semiótica de una demostración por inducción matemática

Bettina Milanesio y María Elena Markiewicz

SEIEM 2023

Introducción

Desde el primer año del nivel universitario, particularmente, en la carrera de grado Profesorado en Matemática, se pretende que los estudiantes comprendan y desarrollen demostraciones matemáticas, en particular, demostraciones utilizando el *Principio de Inducción Matemática* (PIM).

Este tipo de demostración deductiva reviste una importancia fundamental

Permite probar que una propiedad matemática es verdadera para todos los números naturales.

Problema que dio origen a este trabajo

Dificultades que manifiestan estudiantes que ingresan a carreras de grado que tienen matemáticas como asignatura para comprender y desarrollar demostraciones por inducción matemática.

Este problema lo vislumbramos como docentes de Matemática Discreta correspondiente al primer año del Profesorado en Matemática en la Universidad Nacional de Río Cuarto (UNRC), Argentina.

Es ampliamente reconocido desde la investigación en Educación Matemática.

Diversos autores (Crespo, 2016; Nieves-Pupo et al., 2019; Ron y Dreyfus, 2004; Stylianides, 2007) expresan que la comprensión del método de demostración por inducción matemática es un proceso complejo que involucra el conocimiento de:

- *La estructura de la demostración por inducción matemática*
- *El paso base y el paso inductivo*
- *La operatoria algebraica involucrada*
- *Fundamentaciones lógicas implicadas*

Siendo aspectos que pueden ser fuente de dificultades para los estudiantes

Justificación

Son escasas las investigaciones donde se analiza el origen de las dificultades en términos de

- Los procesos matemáticos que intervienen en las demostraciones por inducción matemática
- Los conflictos asociados a dichos procesos que se podrían generar al abordar estas demostraciones

En este trabajo intentamos poner de manifiesto otras posibles explicaciones a dichas dificultades que residen en la complejidad semiótica que reviste este tipo de demostraciones, utilizando como marco el Enfoque Ontosemiótico.

En sintonía con lo planteado por Recio (1999) en su tesis doctoral en relación a cualquier demostración matemática.

Objetivos

Objetivo general

Poner en evidencia la complejidad semiótica de una demostración utilizando PIM planteada en un libro de texto de nivel universitario.

Objetivos específicos

Identificar las funciones semióticas que se necesitan poner a funcionar para comprender y realizar una demostración utilizando PIM.

Develar conflictos semióticos potenciales que pueden aportar explicaciones a las dificultades de los estudiantes.

Marco teórico

Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) desarrollado por Godino y colaboradores.

Práctica matemática → Toda actuación o expresión realizada por alguien para dar solución a problemas matemáticos, comunicarla, validarla o generalizarla.

Significado de un objeto matemático → Emergente de los **sistemas de prácticas** que realiza una persona o compartidas en el seno de una institución.

Constituidos por **objetos** que pueden ser contemplados desde distintas dualidades que → Dan lugar a ciertos **procesos** duales, en particular, al *proceso de representación-significación*

Marco teórico

Función semiótica

Regla de correspondencia establecida por un sujeto

Antecedente (expresión/significante) → Consecuente (contenido/significado)

El análisis pormenorizado de las funciones semióticas que se ponen en juego en una práctica matemática permite develar su **complejidad semiótica**, siendo esto un factor explicativo de <u>conflictos semióticos</u> potenciales (o efectivos)

Cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones)

Metodología

La metodología es inherente al EOS. Realizamos un estudio documental e interpretativo de una demostración matemática desarrollada utilizando el PIM.

Identificación de las funciones semióticas (FS) implicadas en las diversas prácticas matemáticas elementales (PME), tomando como base la caracterización sobre el PIM propuesta en el libro de texto.

Determinación de conflictos semióticos (CS) potenciales que pueden aportar algunas explicaciones a las dificultades de los estudiantes ante la comprensión y la realización de estas demostraciones.

Caracterización del PIM en el libro de texto

Suponga que se tiene una función proposicional $S(n)$ cuyo dominio de discurso es el conjunto de enteros positivos. Suponga que

$S(1)$ *es verdadera;* **(1.7.7)**

para toda $n \geq 1$, si $S(n)$ es verdadera, entonces $S(n+1)$ es verdadera. **(1.7.8)**

Entonces $S(n)$ es verdadera para todo entero positivo n.

Demostración por inducción matemática y algunos aspectos representativos del análisis realizado

Utilice inducción matemática para demostrar que

$$n! \geq 2^{n-1} \text{ para toda } n \geq 1. \qquad \textbf{(1.7.9)}$$

Paso base

[Condición (1.7.7)] Debe demostrarse que (1.7.9) es verdadera si $n = 1$. Esto es sencillo ya que $1! = 1 \geq 1 = 2^{1-1}$.

Paso inductivo

[Condición (1.7.8)] Suponemos que la desigualdad es cierta para n; es decir, suponemos que

$$n! \geq 2^{n-1} \qquad \textbf{(1.7.10)}$$

es cierta. Debemos probar que la desigualdad es cierta para $n + 1$; es decir, debemos probar que

$$(n+1)\,! \geq 2^{n} \qquad \textbf{(1.7.11)}$$

es cierta. Podemos relacionar (1.7.10) y (1.7.11) si observamos que

$$(n+1)! = (n+1)(n!).$$

Ahora bien

$$\begin{aligned}(n+1)! &= (n+1)(n!)\\ &\geq (n+1)2^{n-1} && \text{por (1.7.10)}\\ &\geq 2\cdot 2^{n-1} && \text{ya que } n+1 \geq 2\\ &= 2^{n}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, (1.7.11) es cierta. Esto completa el paso inductivo.

Como se verificaron el *paso base* y el paso inductivo, el principio de inducción matemática dice que (1.7.9) es verdadera para todo entero positivo n. ◀

Johsonbaugh (2005)

PME1

Utilice inducción matemática para demostrar que

$$n! \geq 2^{n-1} \quad \text{para toda } n \geq 1.$$

FS1

Inducción matemática

Se le otorga el contenido

Método de demostración

FS2

$n! \geq 2^{n-1}$ para toda $n \geq 1$

Se le otorga el significado

Función proposicional S con dominio en los enteros positivos

CS1. Dificultades para vincular el PIM con la idea de que, dada una función proposicional S(n), para demostrar que es verdadera para todo n entero positivo basta probar dos condiciones: S(1) es verdadera y, para toda $n \geq 1$, si S(n) es verdadera entonces S(n+1) es verdadera.

CS2. Conflictos para otorgar contenido a la proposición matemática a demostrar como una función proposicional S con dominio en el conjunto de los enteros positivos.

PME2

Paso base

[Condición (1.7.7)] Debe demostrarse que (1.7.9) es verdadera si $n = 1$.

FS7

Paso base

Se le otorga el contenido

S(1) sea verdadera, esto es, $n! \geq 2^{n-1}$ sea verdadera para $n=1$

CS7. Dificultades para significar la expresión "paso base" como que S(1) sea verdadera, es decir, que la desigualdad $n! \geq 2^{n-1}$ sea verdadera para $n=1$.

PME4

Paso inductivo

[Condición (1.7.8)] Suponemos que la desigualdad es cierta para n; es decir, suponemos que

$$n! \geq 2^{n-1} \tag{1.7.10}$$

es cierta. Debemos probar que la desigualdad es cierta para $n+1$; es decir, debemos probar que

$$(n+1)\,! \geq 2^{n} \tag{1.7.11}$$

es cierta.

FS12

Paso inductivo

Se relaciona

Generalización de un condicional: Para toda n>1, si S(n) es verdadera entonces S(n+1) es verdadera.

FS17

Prueba del condicional involucrado

Se asocia

Argumento consistente en suponer el antecedente verdadero y probar el consecuente.

CS12. Dificultades para otorgar significado a la expresión “paso inductivo”. Conflictos para significar al paso inductivo como la generalización de un condicional y para relacionar la expresión $n!\geq 2^{n-1}$ con el antecedente y la expresión $(n+1)!\geq 2^{n}$ con el consecuente.

PME8

Como se verificaron el *paso base* y el paso inductivo, el principio de inducción matemática dice que (1.7.9) es verdadera para todo entero positivo n. ◀

FS27

Paso base y paso inductivo

Se unifican para ser interpretados como

Hipótesis del PIM

FS28

$n! \geq 2^{n-1}$ para todo entero positivo n

Se la asocia con

Tesis del PIM

CS. Conflictos asociados a la posibilidad de unificar el paso base y el paso inductivo a partir de interpretarlos como hipótesis del PIM, que, al haber sido probados, permite asegurar la tesis del mismo.

El análisis realizado pone en evidencia la complejidad semiótica de una práctica demostrativa por inducción matemática

Funciones semióticas

Algunas particulares de esta demostración pues están ligadas a los procesos que exigen la aprehensión de los objetos que definen a la propiedad.

Otras transversales que aplican a cualquier demostración por inducción, pues son inherentes al proceso de argumentación.

FS14 | La desigualdad es cierta para n → $n!\geq 2^{n-1}$ es cierta.

FS12 | Paso inductivo → Generalización de un condicional.

Reflexiones finales

Este trabajo pone de manifiesto la necesidad de ser conscientes, como docentes, de:

- Las distintas funciones semióticas que se ponen a funcionar para lograr una comprensión significativa en la implementación de estas prácticas.

- Los conflictos semióticos que permiten anticipar posibles dificultades en la comprensión y realización de estas demostraciones en términos de los conocimientos matemáticos específicos requeridos.

En el aula se debería promover un ambiente reflexivo y comprensivo de modo que estas prácticas demostrativas no se limiten a procesos algebraicos meramente técnicos (Crespo, 2016)

Reflexiones finales

Este estudio pretende ser un aporte a los estudios sobre la complejidad que revisten las demostraciones matemáticas, y, en particular, *las demostraciones por inducción matemática* desde una perspectiva semiótica

Pone de manifiesto relaciones y significados que muchas veces están ocultos en las prácticas planteadas en un libro de texto.

La desnaturalización de las funciones semióticas y de los posibles conflictos es un primer paso para pensar en procesos de estudio sobre este tipo de demostraciones con mayor idoneidad cognitiva e instruccional.

¡MUCHAS GRACIAS!