Significados pragmáticos de la demostración matemática en estudiantes universitarios

Bettina Milanesio, María Burgos y María Elena Markiewicz

SEIEM 2023

Introducción

La demostración matemática es un proceso inherente a la propia disciplina matemática que se manifiesta de diferentes formas en las clases de matemáticas de los distintos niveles educativos.

↓

Estas formas dependen del contexto en el que se considere a la demostración y del grado de formalidad con el que se la utilice.

Explicación

Prueba

Justificación

Argumentación

Alfaro-Carvajal et al., 2019; Balacheff, 2000; Stylianides et al., 2017

Introducción

Los procesos de enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática constituyen una problemática desafiante en el ámbito de la Didáctica de la Matemática.

Cómo enseñar la demostración

Cómo se produce su aprendizaje

Es un *reto* para los profesores de matemáticas debido a las constantes dificultades que presentan los estudiantes en los procesos de comprensión y desarrollo de demostraciones.

Lew y Mejía-Ramos, 2019; Markiewicz et al., 2021; Stylianides y Stylianides, 2017; Weber et al., 2020

Introducción

Desde la investigación en Educación Matemática se han caracterizado estas dificultades:

- *Los estudiantes no logran comenzar a proponer una demostración o comprender la naturaleza de las mismas.*
- *No logran dar sentido a enunciados con una estructura lógica compleja.*
- *Tienen dificultades para reconocer argumentos inválidos.*

Asociando las causas a la distancia estructural entre las argumentaciones informales y la demostración matemática formal.

Pedemonte y Reid, 2011; Stylianides et al., 2017

Justificación

Son escasas las investigaciones que analizan la complejidad de este tránsito de las argumentaciones informales a la demostración en base a las prácticas, objetos y procesos que intervienen, y en especial, aquellas de naturaleza algebraica.

Un primer avance se llevó a cabo en trabajos que toman el Enfoque Ontosemiótico como marco para analizar la actividad matemática implicada en las prácticas demostrativas.

Markiewicz, Etchegaray y Milanesio (2021)

DISTANCIAS

Demostraciones logradas por estudiantes de nivel secundario ⟷ Demostraciones pretendidas en el ingreso al nivel superior

Godino y Recio, 2001; Markiewicz et al., 2021; Molina et al., 2019; Recio, 1999; Recio y Godino, 2001

Objetivos

Mostrar los resultados de un primer ciclo de investigación con estudiantes ingresantes a los grados de matemáticas y física en una universidad de Argentina, cuando resuelven problemas que requieren justificar propiedades aritméticas.

Identificar los significados personales sobre la demostración de estos estudiantes a partir de:

- Análisis de sus prácticas (tipo de estrategia y dificultades más frecuentes)
- Nivel de razonamiento algebraico emergente en sus prácticas

Fundamentación teórica

Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino et al., 2007; Godino et al., 2019)

Significado pragmático: Configuración de prácticas, objetos y procesos

Modelo del Razonamiento Algebraico Elemental (RAE)

Demostración matemática y términos asociados (Alfaro-Carvajal et al., 2019; Balacheff, 2000; Stylianides et al., 2022)

Procesos de validación, explicación, prueba, demostración informal

Metodología

Descripción general

La investigación tiene un carácter descriptivo y exploratorio, con algunos elementos interpretativos y explicativos (Bisquerra y Alzina, 2004). Empleamos el análisis de contenido para examinar las respuestas de los participantes (Cohen et al., 2018).

Participantes del estudio

Un grupo de 31 estudiantes de ingreso en el primer curso universitario de las carreras de grado Profesorado y Licenciatura en matemáticas y Licenciatura en física en la Universidad Nacional de Río Cuarto (Argentina) durante el año 2023.

Contexto de la implementación

La implementación se lleva a cabo en las actividades de ingreso desarrolladas en la asignatura Matemática Discreta que comparten los estudiantes.

Instrumento de recogida de datos

En cada caso, justifica tu respuesta.

a) Si se suman tres números naturales consecutivos cualesquiera, ¿el resultado es siempre un múltiplo de 3?

b) Si se suman cinco números naturales consecutivos cualesquiera, ¿el resultado es siempre múltiplo de 5?

c) ¿Cuándo será cierto que, si se suman k números naturales consecutivos cualesquiera, el resultado es múltiplo de k?

- Exploración de diferentes ejemplos
- Búsqueda de contraejemplos
- Elaboración de conjeturas
- Búsqueda de condiciones para que se satisfaga una conjetura
- Propuesta de demostraciones

Tipos de estrategias consideradas

Explicación informal

El estudiante se basa en sus propias reglas de decisión de la verdad para garantizar la validez de la proposición.

Uso de contraejemplos

El estudiante refuta una conjetura matemática a través de un razonamiento deductivo.

Argumento empírico

Se basa en el uso de casos particulares para mostrar la veracidad de la proposición matemática.

Tipos de estrategias consideradas

Particularización-Generalización incompleta

Se produce una particularización de la proposición que se pretende demostrar y se obtiene una regla general que, si bien es cierta, no permite probar la proposición matemática inicial.

Demostración informal

El estudiante se basa en un razonamiento deductivo pero no justifica explícitamente las reglas de inferencia usadas y los presupuestos matemáticos que sustentan cada paso de la demostración.

Principales resultados

Grado de pertinencia y estrategias más frecuentes

Estrategia	Grado de pertinencia									Total
	Ítem a			Ítem b			Ítem c			
	I	PC	C	I	PC	C	I	PC	C	
Explicación informal	13	0	0	12	0	0	13	0	0	38
Uso de contraejemplo	2	0	0	1	0	0	0	4	0	7
Argumento empírico	11	0	0	13	0	0	2	0	0	26
Particularización-Generalización incompleta	0	1	0	0	1	0	1	9	0	12
Demostración informal	0	0	4	0	0	4	0	0	1	9
Total	26	1	4	26	1	4	16	13	1	92

Niveles de RAE en la actividad matemática desarrollada

Estrategia	Frecuencia												Total
	Ítem a				Ítem b				Ítem c				
	N0	N1	N2	N4	N0	N1	N2	N4	N0	N1	N2	N4	
Explicación informal	7	6	0	0	7	6	0	0	12	1	0	0	39
Uso de contraejemplo	2	0	0	0	1	0	0	0	0	1	3	0	7
Argumento empírico	10	0	1	0	11	0	1	0	2	0	0	0	25
Particularización-Generalización incompleta	0	1	0	0	0	1	0	0	0	10	0	0	12
Demostración informal	0	0	0	4	0	0	0	4	0	0	0	1	9
Total	19	7	1	4	19	7	1	4	14	12	3	1	92

Ejemplos representativos

Argumento empírico

a - Si se suman 3 números naturales consecutivos. Siempre va a dar como resultado un múltiplo de 3.

por ej: $1+2+3 = 6$

$3+4+5 = 12$

Incorrecta

Nivel 0 de RAE

Explicación informal

1) a) verdadero ya que la suma de n elementos consecutivos dará como resultado un número múltiplo de n

Incorrecta

Nivel 1 de RAE

Significados personales iniciales sobre la demostración

Explicaciones informales o argumentaciones empíricas (argumentaciones no deductivas) para validar las proposiciones matemáticas implicadas.

En general, la actividad matemática se sitúa entre un nivel aritmético (nivel 0 de RAE) y proto-algebraico incipiente (nivel 1 de RAE).

Escaso carácter algebraico en la actividad desarrollada y prevalencia de demostraciones intuitivas o informales.

Reflexiones finales

En la entrada al nivel superior

DISTANCIAS

Significados personales iniciales sobre la demostración

Significados institucionales pretendidos sobre la demostración

Necesidad de promover una articulación efectiva entre las argumentaciones logradas y la demostración pretendida.

Reflexiones finales

Esta necesidad de articulación supone continuar investigando sobre los significados personales e institucionales de la demostración para:

- Brindar oportunidades a los estudiantes que les permitan valorar la significatividad de la demostración como garantía de la validez universal en matemáticas.
- Concientizar a los profesores de matemáticas sobre las estrategias de argumentación utilizadas por los estudiantes, así como también, las dificultades, para considerarlo en sus decisiones instruccionales.
- Pensar en intervenciones que ayuden a los estudiantes a avanzar hacia un mayor nivel de algebrización y superar las dificultades en la transición hacia matemáticas más avanzadas.

¡MUCHAS GRACIAS!